

Postupnosť a limita postupnosti.

Postupnosť

Nech N je množina prirodzených čísel. Zobrazenie $f : N \rightarrow$ do akejkoľvek množiny sa nazýva **nekonečná postupnosť**.

Inak postupnosť môžeme definovať takto:

Ak každému prirodzenému číslu $n \in N$ je podľa určeného pravidla (predpisu) priradené práve jedno $a_n \in R$, potom a_1, a_2, \dots, a_n nazývame postupnosť čísel.

a_1, a_2, \dots, a_n sú členy postupnosti a a_n je n – tý člen.

Postupnosť zapisujeme tiež $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ alebo krátko $\{a_n\}$.

Pr:

$$\text{Harmonická postupnosť } \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \dots$$

Pr:

$$\left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} \right\} = 0, 1, 0, 1, \dots$$

Veta IV.1:

Postupnosť $\{a_n\}$ je {rastúca; neklesajúca; klesajúca; nerastúca} vtedy a len vtedy, ak pre každé prirodzené číslo n platí $\{a_n < a_{n+1}; a_n \leq a_{n+1}; a_n > a_{n+1}; a_n \geq a_{n+1}\}$

Pr:

$$\text{Postupnosť } \left\{ \frac{1}{n^2} \right\} = 1, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots \text{ je klesajúca}$$

Pr:

$$\text{Postupnosť } \left\{ 2 - \frac{1}{n^2} \right\} = 1, 2 - \frac{1}{4}, 2 - \frac{1}{9}, \dots \text{ je rastúca}$$

Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}$ je **zhora (zdola) ohraničená**, ak $\exists K \in R$ ($\exists k \in R$) také, že pre $\forall n \in N$ platí $a_n \leq K$ ($a_n \geq k$).

Ak postupnosť je zhora aj zdola ohraničená, potom hovoríme, že je **ohraničená**.

Ak máme harmonickú postupnosť $\left\{ \frac{1}{n} \right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ môžeme z nej vybrať postupnosť $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$

t.j. každý nepárny člen, alebo $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$ každý párny člen a pod.

Tieto postupnosti nazývame **vybrané postupnosti**.

Postupnosť $\{a_n\}$ nazývame **aritmetickou**, ak $\forall n \in N$ platí $a_{n+1} = a_n + d$, kde d je diferenciacia aritmetickej postupnosti.

Pr:

Postupnosť 2,5,8,..., je aritmetická s $d=3$.

Postupnosť $\{a_n\}$ nazývame **geometrickou**, ak $\forall n \in N$ platí $a_{n+1} = a_n q, q \neq 0 \wedge q \neq 1$, kde q nazývame kvocientom geometrickej postupnosti.

$$a_n = a_1 q^{n-1}; s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}; q \neq 1$$

Pre geom. post. platí:

$$a_s = a_r q^{s-r}; s = \frac{a_1}{1-a}; |q| < 1$$

s_n - účet prvých n - členov

Limita postupnosti

Def:

Číslo a sa nazýva **limita postupnosti** $\{a_n\}$, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také číslo n_0 , že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.

Pomocou kvantifikátorov môžeme skutočne zapísať:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ak si uvedomíme, že ε - ové okolie bodu a $U_\varepsilon(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, potom definície môžeme formulovať aj takto:

Def:

Číslo a sa nazýva limita postupnosti $\{a_n\}$, ak v každom okolí $U_\varepsilon(a)$ ležia skoro všetky členy postupnosti $\{a_n\}$.

Zapíšeme to: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ alebo $a_n \rightarrow a$.

Veta IV.2:

Nech $\{a_n\}$ je konvergentná a má limitu a . Potom každá z nej vybraná postupnosť konverguje a má limitu a .

Veta IV.3:

Každá postupnosť má najviac jednu limitu.

Veta IV.4:

Nech pre všetky členy postupnosti $[a_n]$ platí $a_n \leq A$ ($a_n \geq A$) a nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Potom $a \leq A$ ($a \geq A$).

Veta IV.5:

Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ a nech pre každé $n \in N$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$,
potom aj $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Pr:

Vypočítajte limitu $\left\{1 + \frac{\sin n}{2^n}\right\}$

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{2^n} \leq \frac{\sin n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad / + 1$$

$$1 - \frac{1}{2^n} \leq 1 + \frac{\sin n}{2^n} \leq 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin n}{2^n}\right) = 1$$

Veta IV.6:

Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.

Dôkaz:

Nech $\{a_n\} \rightarrow a$ t.j. $\forall \varepsilon > 0$ t.j. aj pre $\varepsilon = 1$ existuje n_0 také, že pre všetky $n > n_0$ je $|a_n - a| < 1$.

Teda každý člen postupnosti pre $n > n_0$ je ohraničený:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Nech $A = \max\{|a_n| \text{ pre } n \leq n_0\}$.

Ak $K = \max\{A, 1 + |a|\}$, potom $|a_n| < K$ pre $\forall n \in N$. To znamená, že postupnosť $\{a_n\}$ je ohraničená.

Veta IV.7:

Každá monotónna o ohraničená postupnosť je konvergentná.

Veta IV.8:

Ak sú postupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$ konvergentné, tak aj postupnosti $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ sú konvergentné. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = a b$

Ak $b \neq 0$ pre $\forall n \in N a b \neq 0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Dôkaz:

Dokážeme tvrdenie iba pre súčet postupnosti. Treba dokázať, že $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \forall n > n_0$, je $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$. Z predpokladu postupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$ sú konvergentné t.j.:

$$\forall \varepsilon > 0 \left(\text{teda aj pre } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \right) \exists n_1 \forall n > n_1 \text{ platí } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \left(\text{teda aj pre } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \right) \exists n_2 \forall n > n_2 \text{ platí } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ a potom pre každé $n > n_0, (n > n_1, n > n_2)$ platí

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Teda dokázali sme, že $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, také, že $\forall n > n_0$ je $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$.

Uvažujeme postupnosť $\{a_n\} = \{n^2\} = 1, 2^2, 3^2, \dots, n^2$ zrejme postupnosť nie je ohraničená. S rastúcim indexom n vzrastajú členy tejto potupnosti.

Teda: Ku každému číslu A existuje číslo n_0 také, že $\forall n > n_0$ je $a_n > A$. Jednoducho v okolí $U_a(\infty)$ sú skoro všetky členy postupnosti.

Čím väčšia je hodnota A , tým väčšie musíme voliť n_0 .

Z toho vyplýva, že postupnosť má nevlastnú limitu ∞

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall A \exists n_0 \forall n > n_0 : a_n > A$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A \exists n_0 \forall n > n_0 : a_n < A$$

Veta IV.9.:

- a) Nech $\{a_n\}$ je neklesajúca postupnosť. Ak je zhora ohraničená, potom má vlastnú limitu a .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a; a_n \leq a \text{ pre } \forall n \in N$$

Ak nie je zhora ohraničená, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

- b) Nech $\{a_n\}$ je nerastúca postupnosť. Ak je zdola ohraničená, potom má vlastnú limitu a .

Ak nie je zdola ohraničená, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Veta IV.10.:

- a) Ak je postupnosť $\{a_n\}$ ohraničená a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, potom:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0; \text{ ak } b_n \neq 0 \text{ pre } \forall n \in N$$

- b) Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty$$

- c) Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$$

Dôsledok ku a):

Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$, a $\forall n \in N$ je $b_n \neq 0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0$.

Číslo e

Dôležitú úlohu v matematike má postupnosť, ktorej n -tý člen je $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Podľa binomickej vety platí:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{n!n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Pre a_{n+1} člen platí:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Porovnáваме odpovedajúce členy v postupnosti a je vidieť, že

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}; 1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n+1}, \dots, 1 - \frac{n-1}{n} < 1 - \frac{n-1}{n+1},$$

teda $a_n < a_{n+1}$ t.j. postupnosť je rastúca.

Je zrejmé, že $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, teda každý člen postupnosti je väčší ako 1.

Pre $k \geq 2$ platí:

$$1 - \frac{k-1}{n} < 1, \text{ a rovnako } \frac{1}{k!} = \frac{1}{1.2.3.4\dots k} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Potom môžeme a_n člen postupnosti ohraničiť:

$$\begin{aligned} a_n &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \\ &= 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že $1 < a_n < 3$, teda postupnosť je rastúca a ohraničená a podľa Vety IV.7.

je konvergentná. Jej limitu budeme označovať: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Dá sa ukázať, že číslo e je súčtom nekonečného radu:

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \\ e &= 2,71828\dots \end{aligned}$$

Výpočet limit postupnosti.

Poznáme tieto typy neurčitosti:

$$\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^\infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, 0^0$$

Pri postupnostiach sa najčastejšie vyskytujú neurčitosti:

$$\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^\infty$$

a) Limity typu $\frac{\infty}{\infty}$

Ak máme počítať

$$\lim_{n \rightarrow \alpha} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n \rightarrow \alpha} \frac{a_0 n^s + a_1 n^{s-1} + \dots + a_s}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \dots + b_k} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^k}}$$

Vydelíme menovateľa a čitateľa n^k a použijeme Vetu IV.8 a IV.10

Pr:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 5}{4n^2 + n + 3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2\frac{1}{n} + 5\frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \\ &= \frac{3 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0}{4 + 0 + 3 \cdot 0} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Pr:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2n - 1}}{n + 2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{\sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{0}}{1} = 0 \end{aligned}$$

Poznámka: Výsledok limity vieme nájsť aj bez vydelenia čitateľa a menovateľa mocninou n^k následovne.

- 1) Ak $s=k$ t.j. najväčší mocniteľ menovateľa sa rovná najväčšiemu mocniteľovi čitateľa, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_0}{b_0}$
- 2) Ak $s < k$ t.j. najväčší mocniteľ čitateľa je menší ako najväčší mocniteľ menovateľa, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$
- 3) Ak $s > k$ t.j. najväčší mocniteľ čitateľa je väčší ako najväčší mocniteľ menovateľa, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty$ (v závislosti od znamienok a_0, b_0).

b) Limity typu $\infty - \infty$

V takomto prípade použijeme jednu z nasledujúcich možností

- 1) Dáme výraz (n-tý člen postupnosti) na spoločný menovateľ

Pr:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^2 - n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n+1} = -1$$

- 2) Výraz (n-tý člen postupnosti) násobíme vhodnou jednotkou.

Pripomeňme si že $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Pr:
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 + 5n + 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2 + 5n + 1}}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2 + 5n + 1}} &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n + 2}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2 + 5n + 1}} &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Pr:
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^4} - \sqrt[3]{(n^2 - 1)^2} \right) \cdot \sqrt[3]{n^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^4)^2} + \sqrt[3]{n^4(n^2 - 1)^2} + \sqrt[3]{(n^2 - 1)^4}}{\sqrt[3]{(n^4)^2} + \sqrt[3]{n^4(n^2 - 1)^2} + \sqrt[3]{(n^2 - 1)^4}} &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}(n^4 - n^4 + 2n^2 - 1)}{\sqrt[3]{n^8} + \sqrt[3]{n^4(n^2 - 1)^2} + \sqrt[3]{(n^2 - 1)^4}} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3) Využijeme vlastnosti logaritmické funkcie:

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \quad x \cdot \log_a y = \log_a y^x$$

Pr:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[\ln(n+3) - \ln n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+3}{n} \right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n} \right)^n$$

c) **Limity typu 1^∞**

Tieto limity počítame pomocou vzorca
$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = e$$

Pr:
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1} \right)^{n+2} = \left| \frac{2}{n+1} = \frac{1}{k}; n = 2k + 1 \right| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{2k+3} = \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right]^2 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^3 = e^2 \end{aligned}$$

Pr:
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+3}{n} \right)^n &= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n} \right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n = \\ &= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}} \right)^{\frac{n}{3} \cdot 3} = \ln \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}} \right)^{\frac{n}{3}} \right]^3 = \ln e^3 \end{aligned}$$

Pr:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{2n+7} \right)^{3n-2} = \left(\frac{3}{2} \right)^\infty = \infty$$

Pr:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+7}{5n-3} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5} \right)^\infty = 0$$

Pr:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{4n^4+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n}{2\sqrt{4n^4+1}} = \frac{1}{4}$$

Pr:
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n-1}{2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 2n^2 - 3n - 1}{2(n+1)} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$